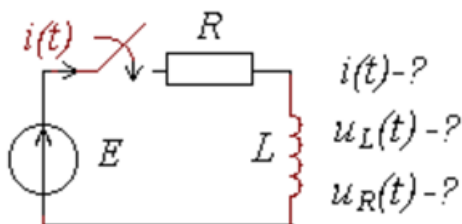


Классический метод анализа переходных процессов в линейных электрических цепях

Классический метод анализа переходных процессов в общем случае основан на составлении и решении системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих схему с n накопителями энергии после коммутации.

Рассмотрим несколько примеров анализа переходных процессов классическим методом в простейших цепях.

Включение RL-цепи под постоянное напряжение



1. Определяем начальные условия при $t = 0$, используя 1-й закон коммутации.

$$i(0) = 0$$

2. Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_R + u_L = E$$

так как

$$u_R = R \cdot i$$

и

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt},$$

то можно записать

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = E \quad (1)$$

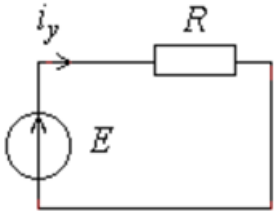
Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами.

3. Решение данного уравнения находим как сумму установившейся i_y и свободной $i_{св}(t)$ составляющих.

$$i(t) = i_y + i_{св}(t) \quad (2)$$

Установившийся режим в цепи после коммутации при $t = \infty$ есть частное решение уравнения (1):

$$i_y = \frac{E}{R} \quad (3)$$



Свободная составляющая есть общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1):

$$L \cdot \frac{di_{\text{св}}}{dt} + R \cdot i_{\text{св}} = 0 \quad (4)$$

решение которого ищем в виде

$$i_{\text{св}}(t) = A \cdot e^{p \cdot t}$$

Постоянная p определяется из характеристического уравнения, соответствующего (4):

$$L \cdot p + R = 0$$

откуда

$$p = -\frac{R}{L}$$

Таким образом,

$$i_{\text{св}}(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad (5)$$

С учетом формул (2), (3) и (5) получим общее решение уравнения (1):

$$i(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad (6)$$

Постоянная A определяется из начального условия

$$i(0) = 0$$

$$i(0) = 0 = \frac{E}{R} + A,$$

откуда

$$A = -\frac{E}{R}$$

Следовательно, искомый ток с учетом (6) равен

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Обозначим множитель в показателе степени:

$$\frac{L}{R} = \tau$$

С учетом этого можно записать

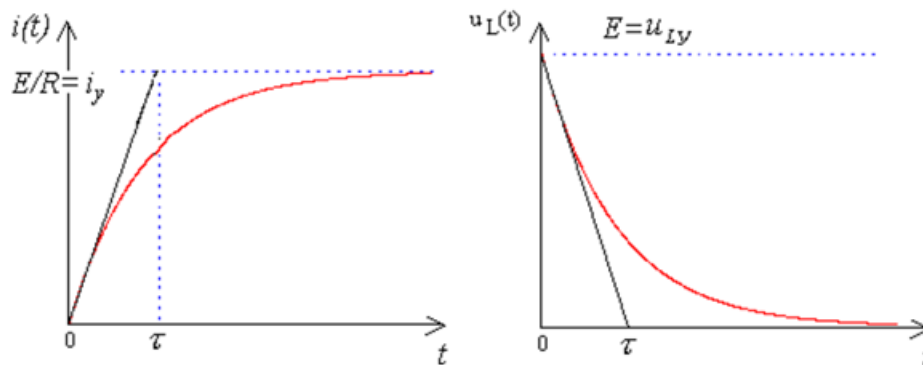
$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Напряжения на других участках цепи:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Графики переходных величин — тока и напряжения на индуктивности приведены на рисунках.



На графиках показаны также установившиеся значения переходных величин и касательные, проведенные к графикам в момент времени $t = 0$.

Величина τ , именуемая **постоянной времени цепи**, равна времени, за которое сила тока или напряжение могли бы достичь своего установившегося значения, если бы скорости изменения этих величин $\frac{di}{dt}$ или $\frac{du_L}{dt}$ оставались неизменными и равными начальным значениям при $t = 0$.

Докажем это утверждение. Умножим начальную скорость $\frac{du_L(0)}{dt}$ на постоянную времени τ и найдем, что спустя время τ после замыкания напряжение u_L достигнет своего значения

$$-\frac{du_L(0)}{dt} \cdot \tau = -\frac{d\left(E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{dt} \cdot \tau = E$$

Знак «-» взят с учетом того, что угловой коэффициент касательной к графику $u_L = u_L(t)$ имеет отрицательное значение.

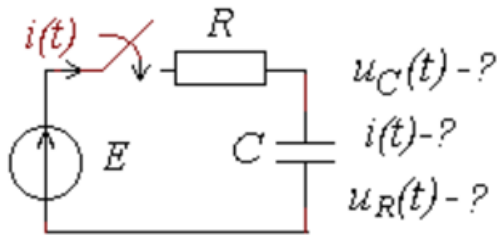
Таким образом, по графикам (осциллограммам) переходной величины можно определять постоянную времени цепи.

За время порядка $3 \cdot \tau - 5 \cdot \tau$ переходной процесс можно считать завершенным, так как переходная функция отличается не более чем на 10% от своего установившегося значения.

$$\frac{u_L(3 \cdot \tau)}{u_L(0)} \cdot 100\% = \frac{E \cdot e^{-3}}{E \cdot e^0} \cdot 100\% = \frac{1}{e^3} \cdot 100\% \approx 5\%$$

Таким образом, постоянная времени цепи τ характеризует время переходного процесса.

Включение источника постоянного напряжения в RC-цепи (зарядка конденсатора)



1. Определяем начальные условия при $t = 0$, используя 2-й закон коммутации.

$$u_C(0) = 0$$

2. Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_R + u_C = E$$

так как

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt},$$

то

$$u_R = R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt},$$

поэтому можно записать

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Решение данного уравнения находим как сумму установившейся i_y и свободной $i_{св}(t)$ составляющих:

$$u_C(t) = u_{Cy} + u_{св}(t)$$

Установившийся режим в цепи после коммутации при $t = \infty$ есть частное решение дифференциального уравнения:

$$u_{cy} = E$$

Свободная составляющая есть общее решение однородного уравнения:

$$R \cdot C \cdot \frac{du_{CCB}}{dt} + u_{CCB} = 0$$

решение которого ищем в виде

$$u_{CCB}(t) = A \cdot e^{p \cdot t}$$

где

$$p = -\frac{1}{R \cdot C}$$

— корень характеристического уравнения

$$R \cdot C \cdot p + 1 = 0$$

Таким образом,

$$u_{CCB}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Общее решение:

$$u_C(t) = E + A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Постоянная A определяется из начального условия

$$u_C(0) = 0$$

$$u_C(0) = 0 = E + A,$$

откуда

$$A = -E$$

Следовательно, искомое напряжение равно

$$u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

Обозначим множитель в показателе степени:

$$R \cdot C = \tau$$

С учетом этого можно записать

$$u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

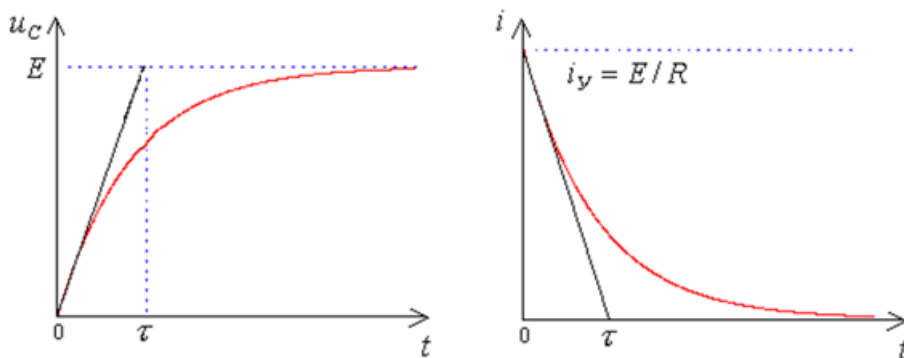
Сила тока:

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

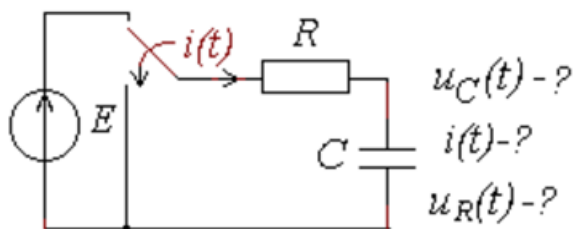
Напряжение на сопротивлении:

$$u_R(t) = R \cdot i = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Графики переходных величин — тока и напряжения на емкостном элементе приведены на рисунках.



Отключение источника постоянного напряжения в RC-цепи (разрядка конденсатора)



2. Определяем начальные условия при $t = 0$, используя 2-й закон коммутации.

$$u_C(0) = E$$

2. Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

3. Общее решение данного уравнения:

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

где

$$\tau = R \cdot C$$

Постоянная A определяется из начального условия

$$u_C(0) = E,$$

следовательно,

$$A = E$$

Искомое напряжение:

$$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

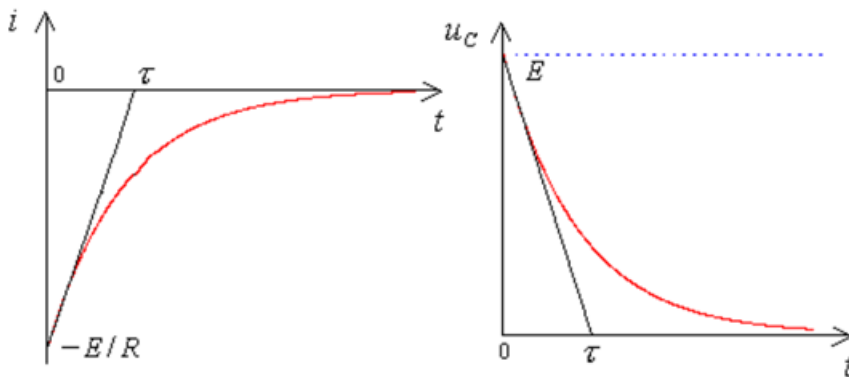
Сила тока:

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

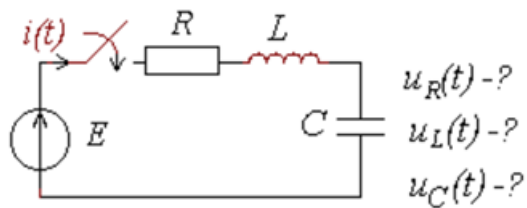
Напряжение на сопротивлении:

$$u_R(t) = R \cdot i = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Графики переходных величин — тока и напряжения на емкостном элементе приведены на рисунках.



Включение последовательной RLC-цепи под постоянное напряжение



1. Определяем начальные условия при $t = 0$.

$$i(0) = 0, u_C(0) = 0 \text{ (2.2.38)}$$

2. Составляем дифференциальное уравнение после коммутации для данной цепи.

По второму закону Кирхгофа можно записать

$$u_R + u_L + u_C = E$$

или с учетом формул

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

и

$$u_R = R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt},$$

получим

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

3. Общее решение данного однородного уравнения ищем в виде

$$u_C(t) = u_{Cy} + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$$

где

$$u_{Cy} = E$$

— конденсатор заряжен,

а постоянные p_1 и p_2 определяются из характеристического уравнения

$$L \cdot C \cdot p^2 + R \cdot C \cdot p + 1 = 0$$

Его решение:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}}$$

Характер переходного процесса зависит от корней характеристического уравнения: от соотношения $\frac{R^2}{4 \cdot L^2}$ и $\frac{1}{L \cdot C}$ или от соотношения $\frac{R}{2 \cdot L}$ и $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$.

A) $\frac{R}{2 \cdot L} > \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ — корни вещественные, отрицательные, разные.

В цепи имеет место **апериодический ПП**. Используя начальные условия, определим постоянные интегрирования:

$$u_C(0) = E + A_1 + A_2 = 0$$

Возьмем производную от выражения (2.2.41) при $t = 0$:

$$C \cdot \frac{du_C(0)}{dt} = i(0) = A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 = 0$$

Из данной системы найдем

$$A_1 = E \cdot \frac{p_2}{p_1 - p_2}$$

и

$$A_2 = -E \cdot \frac{p_1}{p_1 - p_2}$$

После подстановок получим выражение для переходного напряжения емкости:

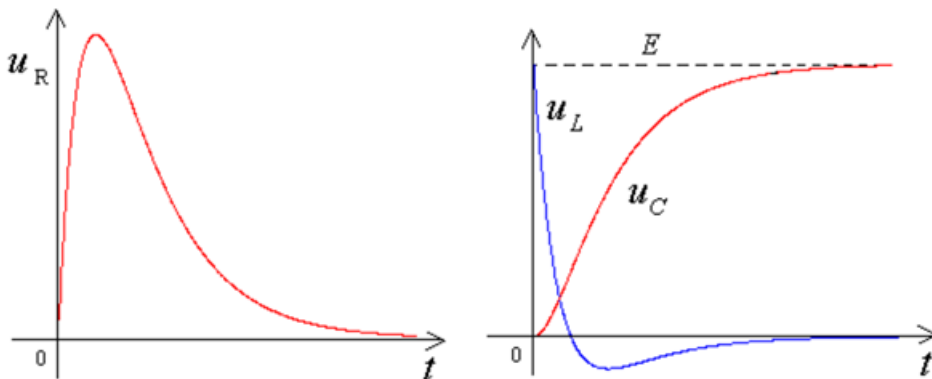
$$u_C(t) = E + \frac{E}{p_1 - p_2} \cdot (p_2 \cdot e^{p_1 \cdot t} - p_1 \cdot e^{p_2 \cdot t})$$

а напряжения на индуктивном и резистивном элементах:

$$u_R = R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{E \cdot R}{L \cdot (p_1 - p_2)} \cdot (e^{p_1 \cdot t} - e^{p_2 \cdot t})$$

$$u_L(t) = L \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} = \frac{E}{p_1 - p_2} \cdot (p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} - p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t})$$

На рисунках приведены графики переходных величин.



Б) $\frac{R}{2 \cdot L} < \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ — корни комплексные сопряженные.

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm j \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}} = -\alpha \pm j \cdot \omega_C$$

где

$$\alpha = \frac{R}{2 \cdot L}$$

— коэффициент затухания ПП,

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4 \cdot L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

— угловая частота свободных (собственных) колебаний реального контура,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

— собственная частота идеального контура при $R = 0$.

В цепи имеет место **колебательный ПП**, вследствие периодического преобразования энергии электрического поля емкостного элемента в энергию магнитного поля индуктивного элемента и наоборот.

С учетом формулы

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot \omega_c$$

и соотношения Эйлера

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$$

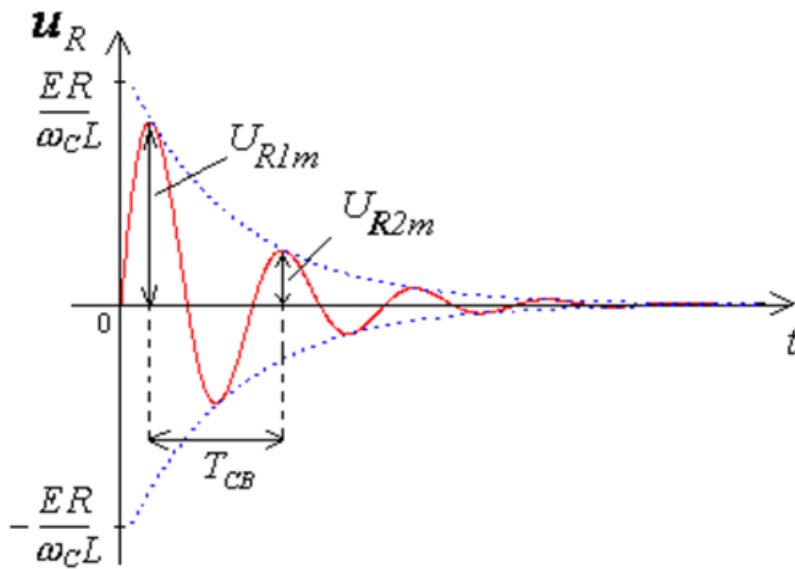
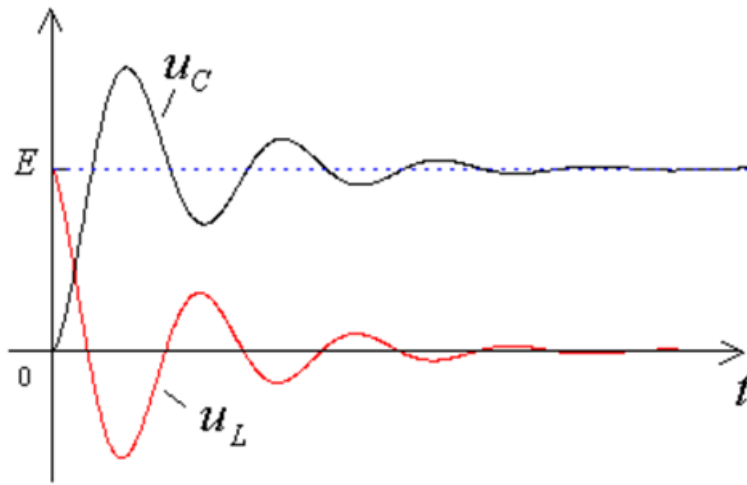
получим:

$$u_c(t) = E + \frac{E}{p_1 - p_2} \cdot (p_2 \cdot e^{p_1 \cdot t} - p_1 \cdot e^{p_2 \cdot t}) \approx E \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega_c \cdot t))$$

$$u_L(t) = E \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega_c \cdot t) - \frac{\alpha}{\omega_c} \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \right)$$

$$u_R = R \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} = \frac{E \cdot R}{\omega_c \cdot L} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_c \cdot t)$$

На рисунках приведены графики данных переходных величин.



Периодом свободных колебаний называется величина

$$T_{CB} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_C}$$

Отношение амплитуд $\frac{U_{1m}}{U_{2m}}$, отстоящих во времени на отрезок T_{CB} , носит название **декремента затухания**:

$$\Delta = \frac{U_{1m}}{U_{2m}} = e^{\alpha \cdot T_{CB}}$$

Логарифмическим декрементом затухания называют величину

$$\Theta = \ln \Delta = \ln e^{\alpha \cdot T_{CB}} = \alpha \cdot T_{CB} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \alpha}{\omega_C}$$

Как видно из рисунка, за период T_{CB} величина u_R затухает в $e^{\alpha \cdot T_{CB}}$ раз.

В) $\frac{R}{2 \cdot L} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ — корни равные, отрицательные:

$$p_1 = p_2 = p = -\frac{R}{2 \cdot L}$$

В цепи имеет место **предельный апериодический ПП**.

Из условия

$$\frac{R}{2 \cdot L} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

определим критическое сопротивление

$$R_{\text{кр}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

при котором имеет место данный ПП.

Общее решение уравнения в этом случае ищем в виде:

$$u_C(t) = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{p \cdot t}$$

Постоянные A_1 и A_2 определим также, как и в предыдущих пунктах, из начальных условий.

С учетом этого получим выражения для переходных величин:

$$u_C(t) = \frac{E}{L \cdot C} \cdot e^{p \cdot t} \cdot \left(\frac{t}{p} - \frac{1}{p^2} \right) + E$$

$$u_R(t) = \frac{E \cdot R}{L} \cdot t \cdot e^{p \cdot t}$$

$$u_L(t) = E \cdot e^{p \cdot t} \cdot (1 + p \cdot t)$$

На рисунках приведены графики данных переходных величин:

